
Mathematik

Normales Niveau

Dauer: 4 Stunden

Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , etc. stehen.

Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben, so runden Sie auf 3 signifikante Ziffern.

Jede Aufgabe wird mit je maximal 12 Punkten bewertet.
Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Gegeben ist die Kurve $y = 2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$
 - a) Zeigen Sie, dass die Kurve für alle Werte von c symmetrisch zur y -Achse ist.
 - b) Bestimmen Sie $c \neq 0$ so, dass die Kurve die x -Achse berührt.
(Falls Sie c nicht bestimmen können, rechnen Sie mit dem Wert $c = -5$ weiter.)
 - c) Geben Sie für den in b) berechneten Wert für c die Extrempunkte und die Nullstellen der Kurve an. Skizzieren Sie die Kurve.
 - d) Berechnen Sie für den in b) berechneten Wert für c den Inhalt der Fläche, welche von der Kurve und der x -Achse begrenzt wird, exakt.

 2. Gegeben ist der Kreis $K: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$.
 - a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises K .
 - b) Legen Sie vom Nullpunkt aus die Tangenten an den Kreis K . Geben Sie die Gleichungen und die Berührungspunkte an.
 - c) Die in b) bestimmten Tangenten und der kürzere Kreisbogen begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.
 - d) Geben Sie den Radius des grössten Kreises an, den Sie in das in c) beschriebene Flächenstück einzeichnen können.
-

3. Sie haben einen normalen Spielwürfel und einen Gefälschten. Beim gefälschten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu werfen $P(6) = \frac{1}{3}$, diejenige eine 1 zu werfen $P(1) = \frac{1}{12}$. Ferner gilt: $P(2) = P(3) = P(4) = P(5)$.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit dem gefälschten Würfel die Augenzahl 3?
 - Sie wählen zufällig einen der beiden Würfel aus und werfen ihn zweimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der Augenzahlen (Augensumme) 2?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit dem normalen Spielwürfel in drei Würfeln die Augensumme 15?
 - Sie werfen den normalen Spielwürfel so oft, bis eine Augenzahl zum zweiten Mal erschienen ist. Dann hören Sie auf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werfen Sie genau viermal?
 - Nun wählen Sie zufällig einen der beiden Würfel aus und werfen ihn sechsmal. Sie staunen: Fünfmal haben Sie die 6 geworfen. Sicher denken Sie nun, dass Sie den gefälschten Würfel geworfen haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit irren Sie sich?
4. Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = e^x \cdot \left(1 - \frac{1}{4}e^x\right)$.
- Bestimmen Sie die Nullstelle, den Extrempunkt und den Wendepunkt der Kurve. Fertigen Sie eine Skizze der Kurve an.
 - Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt der Kurve.
 - Diese Tangente, die Kurve und die x-Achse begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.
5. Die folgenden beiden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.
- Gegeben sind die Punkte $A(1, 2, -2)$, $B(-9, -8, 3)$ und $C(4, -4, -8)$.
 - Berechnen Sie alle Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
 - Liegt der Punkt $P(-1, 0, -1)$ auf der Geraden AB?
 - Liegt der Punkt $Q(-7, -18, -4)$ in der Ebene des Dreiecks ABC?
 - Ein etwas exzentrischer Gärtner möchte ein kreisförmiges und ein quadratisches Blumenbeet mit einem Zaun umzäunen. Es steht im 100 m Zaun zur Verfügung. Bestimmen Sie den Radius r des kreisförmigen Blumenbeetes und die Seitenlänge a des quadratischen Blumenbeetes so, dass die Fläche der beiden Blumenbeete zusammen
 - maximal ist.
 - minimal ist.