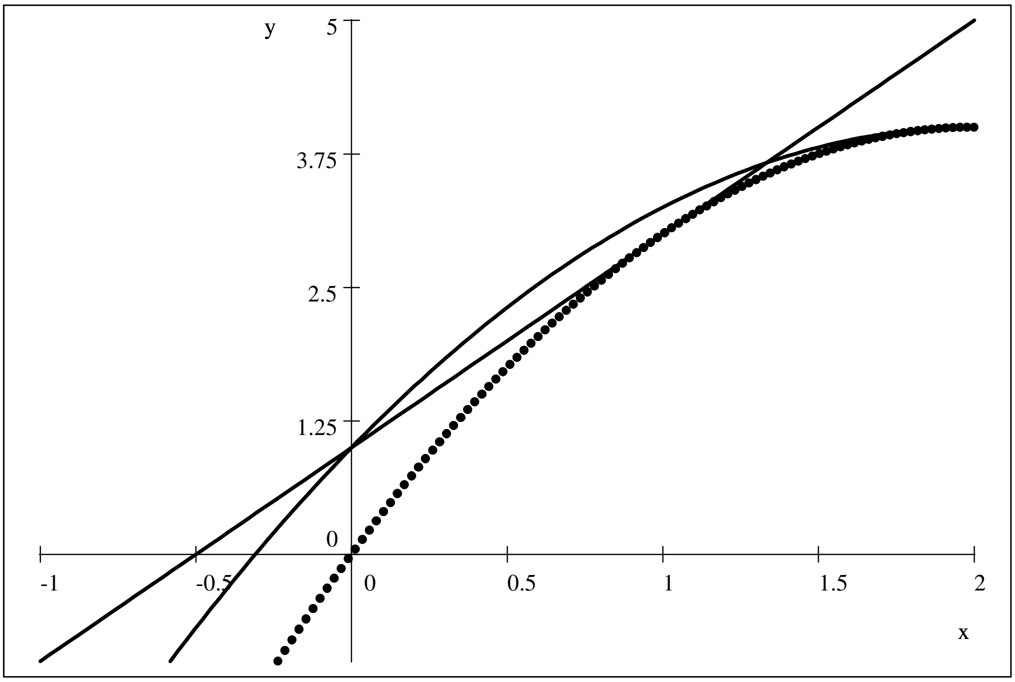
Frühjahr 2007

1. $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = a(x-2)^2 + 4$

   a)$a = -3/4$

   Skizze, Schnittpunkte und eingeschlossene Fläche :



   Nullstellen : $\underline{\underline{x_{1/2} = 0, \frac{4}{3}}}$

$$\underline{\underline{A}} = \int_0^{\frac{4}{3}} (g(x) - f(x))\, dx = \underline{\underline{\frac{8}{27}}}$$

   b)Finde a, so dass sich die Graphen berühren :

   $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = a(x-2)^2 + 4$

   Eine Lösungsidee : bei Berührung fallen die zwei Schnittpunkte zu einem zusammen, also Diskriminante =0
   : $a = -1$
   Andere Lösungsidee : bei Berührung stimmen die Funktionen in ihren y-Werten und ihren Ableitungen überein :

$$\begin{aligned} I.f(x) &= g(x) \\ II.f'(x) &= g'(x) \\ a &= -1 \end{aligned}$$

2. Eine Firma beschäftigt drei Mitarbeiter, die telefonische Anfragen beantworten. Frau Kenner kann 90% aller Fragen zur Zufriedenheit beantworten, Herr Gut 80% und Frau Patzer nur 55%.
   Die Anfragen werden zufällig an die drei verteilt.

   a)Wie gross ist die WS, dass ein Kunde eine zufriedenstellende Antwort erhält ?
   Er landet mit 1/3 bei jedem der drei.
   $WS = 30\% + 26.67\% + 18.33\% = 75\%$ aller Fälle.

   b)Ein Kunde hat eine zufriedenstellende Antwort erhalten. Wie gross ist die WS, dass diese von Frau Kenner kommt ?

   $WS = \frac{30\%}{75\%} = 40\%$

   c)An einem Tag sind 6 Anfragen gemacht worden. Wie gross ist die WS, dass mindestens 5 davon zur Zufriedenheit der Kunden ausgefallen sind ?

WS(mindestens 5) = WS(genau 5)+WS(genau 6) $= 6 \cdot 0.75^5 \cdot 0.25 + 0.75^6 = 53.4\%$

d)Wie viele Fragen muss Frau Kenner mindestens beantworten, damit sie mit einer WS von 0.99 nicht alle Fragen zur Zufriedenheit beantwortet hat ?

$$n \geqslant 44$$

3. Lösen Sie die von einander unabhängigen Aufgaben.

3.1 Für jede reele Zahl k sind die zwei Geraden a und b durch die Gleichungen

a: kx-4y+k=0

b: 8x+(6k-2)y-3=0

1) Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden für k=2

Schnittwinkel ist $26.565° + 38.660° = 65.226°$

2) Bestimmen Sie alle Werte von k, für die a und b senkrecht aufeinander stehen.

$$\begin{aligned} m_a \cdot m_b &= -1 \\ k &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3.2 Die Flächeninhalte zweier Kreise K_1 mit M_1 $(-11|3)$ und K_2 mit M_2 $(17|15)$ verhalten sich wie 9:1. Die beiden Kreisflächen besitzen einen einzigen gemeinsamen Punkt B.

Bestimmen Sie B und die Gleichung der gemeinsamen Tangente in B.

Wenn sich die Flächeninhalte (also im wesentlichen die Quadrate der Radien) wie 9:1 verhalten, dann die Radien wie 3:1 und daher wird die Strecke M_1M_2 im Verhältnis 3:1 geteilt, B hat als den Ortsvektor :

$\overrightarrow{r_B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$

Die gemeinsame Tangente steht senkrecht auf $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \end{pmatrix}$

senkrecht dazu: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix}$

$t : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix}$

4. Lösen Sie die von einander unabhängigen Aufgaben.

4.1 Gegeben ist das Dreieck A(2/2/-3), B(-1/6/6) und C(10/0/4).

a) Berechnen Sie den kleinsten Eckwinkel, sowie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Der kleinste Eckwinkel liegt der kleinsten Seite gegenüber :

$AB = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{106}$, $AC = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{117}$,$CB = \left\| \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{161}$

$\cos\gamma = \frac{c^2-a^2-b^2}{-2bc} = \frac{86}{6279}\sqrt{2093} = 0.6266$

$\gamma = \arccos(\frac{86}{6279}\sqrt{2093}) = 51.2°$

$A = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{117}\sqrt{161}\sin 51.2° = 53.481$

b) M_1 sei der Mittelpunkt von a, M_2 der Mittelpunkt von b. Beweisen Sie, dass M_1M_2 parallel zu c verläuft.

$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A}}{2} - \frac{\overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B}}{2} = \frac{\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a}$

Also ist M_1M_2 parallel und genau halb so lang wie c.

4.2 Bestimmen Sie alle x$\in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ -x \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

$\overrightarrow{e} = k \cdot \overrightarrow{f}$

$k = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow \underline{\underline{x = \pm 2\sqrt{2}}}$

4.3 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung in der Grundmenge $G = \{x | -\pi < x < \pi\}$

$$\begin{aligned}
\sin^3 x - \sin x &= \sin x \cos^2 x + 3\sin^2 x \\
\sin x &= 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ einzige Lösung in G} \\
3\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x + 1 &= 0 \\
\sin x_1 &= -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{6} \text{ und } x = -\frac{5}{6}\pi \text{ in G} \\
\sin x_2 &= 2 \Longrightarrow \text{keine Lösung}
\end{aligned}$$

5. Zwischen x=0 und der ersten positiven Nullstelle der Funktion $f(x) = (x^2 - 1)^2$ werde ein Punkt P(x|y) auf dem Graphen gewählt. Er bildet mit den Punkten Q(x|0) und R(0|y) sowie dem Ursprung O(0|0) ein Rechteck.

   a)Für welche Wahl von P wird der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal ?

   Bestimmen Sie diesen maximalen Inhalt.

   $A(x) = x - 2x^3 + x^5$

   A wird maximal, entweder an den Rändern des Definitionsbereichs $[0; 1]$ oder dort wo die erste Ableitung gleich 0 wird und ihr Vorzeichen wechselt.

$$\begin{aligned}
A'(x) &= 0 \\
x_{1-4} &= 1, -1, -\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{1}{5}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

   Der in Frage kommende Wert ist $x_4 = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

   Am Rand von D ist A(0)=0 bzw. A(1)=0, also minimal. Probe ob x_4 auch ein Maximum liefert :

   $A'(\frac{1}{5}\sqrt{5}) = -\frac{8}{5}\sqrt{5} < 0$, also ein Maximum.

   Der Wert des Flächeninhalts ist $A(\frac{1}{5}\sqrt{5}) = \frac{16}{125}\sqrt{5} = F_1$

   b)Das Rechteck OQPR werde um die y-Achse rotiert. Für welchen Wert von x wird der Rauminhalt des entstehenden Zylinders maximal ?

   $V(x) = G \cdot H = \pi(x^2 - 2x^4 + x^6)$

$$\begin{aligned}
V'(x) &= 0 \\
x_{1-5} &= -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, -1, 0, 1
\end{aligned}$$

   Der in Frage kommende Wert ist $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

   Am Rand von D ist V(0)=0 bzw. V(1)=0, also minimal. Probe ob x_2 auch ein Maximum liefert :

   $V''(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = -\frac{8}{3}\pi < 0$, also ein Maximum.

   Der Wert des Flächeninhalts ist $V(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{4}{27}\pi$

c)Das Rechteck, das in b) durch Rotation einen Zylinder erzeugt, hat den Flächeninhalt F_2. Um wie viel Prozent ist der Inhalt von F_2 grösser oder kleiner als derjenige von F_1 ?

$F_2 = \frac{4}{27}\sqrt{3}$

$F_1 = \frac{16}{125}\sqrt{5}$

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{16}{125}\sqrt{5}}{\frac{4}{27}\sqrt{3}} = \frac{36}{125}\sqrt{15} = 1.1154$

F_1 ist um 11,54% grösser als F_2