



Schweizerische Maturitätsprüfung

Bern und Basel, Sommer 2016

MATHEMATIK, Erweitertes Niveau

Kand.-Nr.:

Name, Vorname:

Erreichte Punktzahl:

Note:

Visum Korrigierende(r):

Fach:

Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau

Dauer:

4 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel:

Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Maximale Punktzahl:

80 Punkte

Autoren:

Andreas Nüesch, Dr. Daniel Wirz

Fachspezifische Anweisungen:

Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder Aufgabe soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 16 Punkten bewertet. Insgesamt sind 80 Punkte erreichbar. Ab 70 Punkten wird die Note 6 erteilt.

1 Analysis

Für jedes $a > 0$ (a konstant) definiert die Gleichung $y = x \cdot e^{1-ax}$ eine Kurve K_a .

- (7P.) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurve K_a mit den Koordinatenachsen und den Hochpunkt H in Abhängigkeit von a . Weisen Sie nach, dass es sich um einen Hochpunkt handelt. Geben Sie die Gleichung der Asymptote an.
Zeichnen Sie die Kurve K_1 ($a=1$) unter Verwendung der Asymptote im Bereich $[-1,4]$. (mindestens 5 Kurvenpunkte einzeichnen)
- (3P.) Bestimmen Sie Koordinaten des Wendepunktes W in Abhängigkeit von a und geben Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt an.
- (2P.) Bei jeder Kurve K_a wird eine Gerade g_a durch Hoch- und Wendepunkt gelegt. Zeigen Sie, dass alle diese Geraden parallel sind.
- (4P.) Die Kurve K_a begrenzt mit den Koordinatenachsen ein nach rechts unbegrenztes Flächenstück. Für welchen Wert von a beträgt sein Inhalt 1?

2 Stochastik

Wir betrachten einen Würfel, von dem drei Seitenflächen eine 1, zwei Seitenflächen eine 2 und eine Seitenfläche eine 3 zeigt. Alle Seitenflächen sind gleichwahrscheinlich.

Ein solcher Würfel wird zehnmal hintereinander geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- a) (1P.) Man wirft zehnmal eine 1.
- b) (1P.) Man wirft keine 3.
- c) (1P.) Man wirft mindestens einmal eine 3.
- d) (2P.) Man wirft genau dreimal eine 1.
- e) (2P.) Man wirft mindestens zweimal eine 2.

f) (2P.) Wie viele Würfel müsste man gleichzeitig werfen, um mit 80 %-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal eine 3 zu erhalten.

Nun werden drei dieser Würfel gleichzeitig geworfen. Nach dem Wurf wird die Summe der Augenzahlen gebildet. Sie wird im Folgenden als Augensumme bezeichnet.

- g) (5P.) Berechnen Sie den Erwartungswert der Augensumme.
- h) (2P.) Folgendes Spiel wird Ihnen angeboten: Ist die Augensumme grösser oder gleich 7, erhalten Sie Ihren Einsatz und das Fünffache Ihres Einsatzes zurück, ansonsten ist Ihr Einsatz verloren. Ist das Spiel fair?

3 Vektorgeometrie

Zeichnen Sie im Schrägbild den Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 8, mit $A(8/0/0)$, $B(8/8/0)$, $C(0/8/0)$, $D(0/0/0)$, $E(8/0/8)$, $F(8/8/8)$, $G(0/8/8)$, $H(0/0/8)$. Die x-Achse soll dabei um 45° nach vorne zeigen.

Wählen Sie in y- und z-Richtung je zwei Häuschen, in der x-Richtung eine Häuschendiagonale als Einheit. (2P.)

- a) (2P.) Tragen Sie die Punkte $P(3/8/0)$, $Q(0/4/8)$ und $R(5/0/0)$ ein. Durch diese Punkte wird eine Ebene ϵ_1 gelegt. Bestimmen Sie ihre Koordinatengleichung.
- b) (3P.) Berechnen Sie alle Schnittpunkte von ϵ_1 mit den Würfelkanten und zeichnen Sie diese im Schrägbild ein. Heben Sie die Schnittfigur von ϵ_1 mit dem Würfel farbig hervor.
- c) (2P.) Legen Sie durch Q und $S(8/8/4)$ eine Ebene ϵ_2 , die senkrecht zu ϵ_1 ist. Geben Sie die Koordinatengleichung von ϵ_2 an.
- d) (1P.) Bestimmen Sie die Fläche des Dreiecks PQR.
- e) (2P.) Berechnen Sie den Winkel $\angle ERQ$.
- f) (2P.) Durch S wird eine Senkrechte g zu ϵ_1 gelegt. Bestimmen Sie den Schnittpunkt I von g und ϵ_1 .
- g) (2P.) Die Kugel K mit Mittelpunkt S und Radius $r=7$ bildet mit ϵ_1 einen Schnittkreis. Berechnen Sie seinen Radius.

4 Komplexe Zahlen, Abbildungen in der Ebene

Die Aufgaben a) und b) sind unabhängig voneinander lösbar.

a) (8P.) Betrachten Sie die Folge $z_{n+1} = z_n \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ mit $z_1 = 1$.

a₁) Berechnen Sie z_2 , z_3 und z_4 in Normal- und Polarform und zeichnen Sie die entsprechenden Punkte in der Gaußschen Zahlenebene.

a₂) Welches ist die kleinste natürliche Zahl n , für die $z_1 = z_n$ gilt?

a₃) Zeichnen Sie die Figur, welche durch den Streckenzug $z_1 z_2 z_3 \cdots z_n$ entsteht. Berechnen Sie die Länge dieses Streckenzugs.

b) (8P.) Betrachten Sie die Matrix $M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

b₁) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von M .

b₂) M ist die Matrix einer linearen Abbildung bezüglich des kartesischen Koordinatensystems von Punkten der Ebene auf diese selbst.

Bilden Sie das Quadrat mit $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ und $D(.,.)$ mit M ab. Welche Figur entsteht? (Zeichnung und Rechnung)

b₃) Welche geometrische Bedeutung haben die Eigenvektoren für die Abbildung?

5 Gemischte Aufgaben

Die Aufgaben a), b) und c) sind unabhängig voneinander lösbar.

a) (4P.) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $6 \sin^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$ im Intervall $[-\pi, 3\pi]$.

b) (5P.) Welche Kurve wird durch $9x^2 + 4y^2 - 36x + 24y = -36$ beschrieben? Berechnen Sie die Brennpunkte. Skizzieren Sie Kurve mit ihren Brennpunkten.

c) (7P.) In einem Trapez haben zwei Seiten die Länge 1 und zwei Winkel betragen 90° .

Bestimmen Sie a , h und den Winkel α so, dass die Trapezfläche maximal wird. Weisen Sie nach, dass es sich um ein Maximum handelt.

