Schweizerische Maturitätsprüfung
Sommer 2015 Bern

Gruppe/Nr.: ....
Name/Vorname: ....

Mathematik Erweitertes Niveau

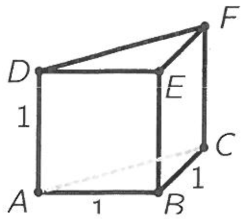
- Bei jeder Aufgabe soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

1 Gebrochenrationale Funktion (6+2+2+1+1+2=14P.)

Gegeben sind die Funktion f: $f(x) = \dfrac{ax^2}{x-a}$ (mit $a > 0$) und die Gerade g: $y = ax + a^2$

a) Bestimmen Sie Definitionsmenge, Nullstellen und lokale Extrema der Funktion f in Abhängigkeit von a. Entscheiden Sie jeweils, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt. Geben Sie die vertikalen Asymptoten des Graphen von f und die Wertemenge der Funktion an.
b) Zeigen Sie, dass die Gerade g (schiefe) Asymptote des Graphen von f ist.
c) Zeichnen Sie den Graphen von f mit seinen Asymptoten für $a = 1$.
d) Bestimmen Sie für beliebiges a die Gleichung der Geraden h, welche durch die beiden Extremalpunkte des Graphen von f geht.
e) Bestimmen Sie den Schnittpunkt und Schnittwinkel von g und h für $a=1$.
f) Bestimmen Sie a so, dass der Winkel aus Aufgabe e) maximal wird. Wie gross ist dieser maximale Schnittwinkel?

2 Wahrscheinlichkeit (3+1+2+2+2=10P.)



Wir betrachten Bauklötzchen, deren Form ein gerades Prisma mit rechtwinklig-gleichschenkliger Grundfläche, Schenkellänge 1 und Höhe 1 ist.

a) Ein solches Bauklötzchen kann bei einem Wurf auf eine der Dreieckflächen, auf eine der in der Skizze senkrechten Quadratflächen oder auf die hinten liegende Fläche zu liegen kommen. Nehmen wir an, die Wahrscheinlichkeiten entsprechen den Flächeninhalten dieser Flächen. Wie gross sind diese dann (exakte Lösung!)?

Längere Versuchsreihen zeigen, dass die Wahrscheinlichkeiten etwa folgende Werte besitzen: p(ABC)=p(DEF)=0.1, p(ABDE)=p(BCEF)=0.25 und p(ACDF)=0.3

Wir werfen drei solche Bauklötzchen.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen alle auf ein Dreieck?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen alle auf verschieden grosse Flächen?
d) Wie viele Bauklötzchen müssen Sie miteinander werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % mindestens 1 auf eine Dreiecksfläche fällt?
e) Sie werfen ein Bauklötzchen. Es fällt auf eine viereckige Fläche. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es die grosse Rechteckfläche ACDF?

3 Matrizen (2+5+5=12P.)

Betrachten Sie die Matrix $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

a) Ist M invertierbar? (Begründung!) Ist M orthogonal? Was bedeutet dies für die Bildvektoren?
b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen auf die Länge 1 normierten Eigenvektoren von M.
c) Betrachten Sie die durch M definierte lineare Abbildung $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

von der x-y in die u-v-Ebene. Bilden Sie die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

sowie die Linearkombination $\vec{r} = 0.5\vec{a} + 1.5\vec{b}$ durch M in die u-v-Ebene ab. Zeichnen und erklären Sie die Zusammenhänge zwischen $\vec{a}$, $\vec{b}$ und den Bildvektoren.

4 Vektorgeometrie (2+1+3+2+6=14P.)

Gegeben sind die Punkte E(6,2,1), F(2,6,3) und A(6,5,4).

a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene AEF.
b) Bestimmen Sie den Inhalt der Dreieckfläche AEF.
c) Zeigen Sie, dass die Ebene AEF die Kugel mit Mittelpunkt M(0,2,7) und Radius R=6 berührt. Geben Sie die Koordinaten des Berührpunkts an.
d) Wie gross müsste der Radius einer Kugel mit gleichem Mittelpunkt sein, damit sie die Ebene AEF in einem Kreis mit Radius 8 schneidet?
e) A ist ein Eckpunkt des Quadrats ABCD, dessen Mittelpunkt auf der Geraden EF liegt. Die Gerade EF steht ausserdem senkrecht auf der Quadratfläche. Bestimmen Sie die restlichen Eckpunkte des Quadrats.

5 Trigonometrische Funktion (5+4+3=12P.)

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f_1 : y = 2\sin(x) + 1$ aus den Nullstellen und Extremalwerten (Koordinaten angeben, darf ohne Ableitungen gelöst werden) im Intervall $[0,2\pi]$. Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von f_1 an.
b) Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von f_1, seiner Tangente t in $x = \pi$ und der y-Achse.
c) Betrachten Sie für x<0 die Funktion $f_2 : y = A \cdot \sin(bx + c) + 0.5$. Sie soll die Periode π besitzen und an der Stelle x=0 stetig differenzierbar, d.h. der Graph von f_2 soll ohne Knick und Sprung an den Graphen von f_1 anschliessen. Bestimmen Sie daraus die Funktionsgleichung von f_2.

6 Komplexe Zahlen (2+3+4+3+2=14P.)

Betrachten Sie die ersten 6 Glieder der komplexen Folge

$z_1 = 1, z_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + 0.5i, z_3 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + 1.5i, z_4 = 1 + 2i, z_5 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 1.5i, z_6 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 0.5i$

a) Zeichnen Sie diese in der Gausschen Zahlenebene.
b) Die eingezeichneten Punkte bilden ein Sechseck.
Bestimmen Sie den Umfang und die Fläche der Figur.
c) Die Zahlenfolge ist iterativ definiert durch $z_{n+1} = az_n + b$ und $z_1 = 1$.
Berechnen Sie a und b.
d) Berechnen Sie den Fixpunkt dieser Folge und zeigen Sie, dass $z_7 = z_1$.
e) Wir betrachten nun die mit derselben Rekursionsformel wie bei c) iterativ definierten Folge $y_{n+1} = ay_n + b$ starten neu bei $y_1 = 1 - i$. Es entsteht wieder eine Figur durch die ersten 6 Folgenglieder. (Sie müssen die Folgenglieder nicht berechnen). Zeichnen Sie die neue Situation in der Figur aus a) ein. Was entsteht?