EN-Herbst 2007

1. Gegeben ist die Gleichung $f_a(x) = \frac{a^3}{a^2+4x^2}$ einer Funktion f_a , wobei a ein positiver, reeller Parameter ist.

a) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ für a=1

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}dx \\ I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}dx \underset{2x=u \text{ und } \frac{du}{dx}=2}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{2} \\ I &= \left[\frac{1}{2}\arctan u\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie, das der Graph von f_a für jedes a immer genau einen Extremalpunkt hat und dass dieser Extremalpunkt ein Hochpunkt ist.

f besteht aus einem (nach Voraussetzung) positiven, konstanten Zähler und einer Nennerfunktion $a^2 + 4x^2$, die eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Tiefpunkt $(0|a^2)$ ist. Diese Parabel hat genau einen Tiefpunkt, der durch die Kehrwertbildung mit a^3 zum Hochpunkt (0|a) wird.

c) Der Graph der Funktion f_a hat im ersten Quadranten für jedes a genau einen Wendepunkt. Berechnen Sie dessen Koordinaten und geben Sie die Funktionsgleichung h(x) der Kurve an, auf der all diese Wendepunkte liegen.

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \frac{a^3}{a^2+4x^2} \\ f_a'(x) &= -8a^3\frac{x}{(a^2+4x^2)^2} \\ f_a''(x) &= 8a^3\frac{12x^2-a^2}{(a^2+4x^2)^3} \\ f_a''(x) &= 0 \\ 12x^2-a^2 &= 0 \\ x_{1/2} &= \pm\frac{1}{6}a\sqrt{3} \\ y_{1/2} &= \frac{3}{4}a \end{aligned}$$

Die Nullstellen der 2.ten Ableitung sind ungerade, haben also einen Vorzeichenwechsel (der Nenner ist stets positiv), also sind die gefundenen Punkte Wendepunkte $W_{1/2}\left(\pm\frac{1}{6}a\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{3}{4}a\right)$.
Im ersten Quadranten : $W_1\left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{3}{4}a\right)$.
Die Kurve dieser Wendepunkte ergibt sich zu :

$$\begin{aligned} & W_1\left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{3}{4}a\right) \\ x &= \frac{1}{6}a\sqrt{3} \\ y_1 &= \frac{3}{4}a \Longrightarrow a = \frac{4}{3}y \\ \text{in } x &: \\ x &= \frac{2}{9}y\sqrt{3} \\ h &: \; y = \frac{3}{2}\sqrt{3}x \end{aligned}$$

d) Die Funktion f_a soll für a=2 durch eine quadratische Funktion g so angenähert werden, dass die beiden Funktionen an der Stelle x=0 sowohl im Funktionswert, als auch in den ersten beiden Ableitungen übereinstimmen. Wie heisst die

Funktionsgleichung von g?

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{8}{4\left(x^2+1\right)} \\ f_2'(x) &= -4\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2} \\ f_2''(x) &= 4\frac{3x^2-1}{\left(x^2+1\right)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(0) &= 2 \\ f_2'(0) &= 0 \\ f_2''(0) &= -4 \end{aligned}$$

Aufgrund der Achsensymmetrie von f könnte man im Ansatz auch sofort b=0 setzen :

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ y' &= 2ax+b \\ y'' &= 2a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(0) &= 2 = y(0) = c \\ f_2'(0) &= 0 = y'(0) = b \\ f_2''(0) &= -4 = y'' = 2a \\ a &= -2 \\ g &: \ y = -2x^2+2 \end{aligned}$$

e) Zeigen Sie, dass sich zwei zu verschiedenen positiven Werten von a gehörige Graphen von f_a nicht schneiden.

$$\begin{aligned} \frac{a_1^3}{a_1^2+4x^2} &= \frac{a_2^3}{a_2^2+4x^2} \\ \frac{a_1^3}{4x^2+a_1^2} &= \frac{a_2^3}{4x^2+a_2^2} \\ a_1^3\left(4x^2+a_2^2\right) &= a_2^3\left(4x^2+a_1^2\right) \\ 4x^2a_1^3-4x^2a_2^3 &= a_1^2a_2^3-a_1^3a_2^2 \\ \text{da } a_1 &\neq a_2 \text{ kann man dividieren} \\ x^2 &= \frac{a_1^2a_2^3-a_1^3a_2^2}{4a_1^3-4a_2^3} \\ x^2 &= \frac{a_2^2a_1^2\left(a_2-a_1\right)}{(-4)\left(a_2-a_1\right)\left(a_1a_2+a_1^2+a_2^2\right)} \\ & \text{und kürzen} \\ x^2 &= -\frac{1}{4}\frac{a_2^2a_1^2}{\left(a_1a_2+a_1^2+a_2^2\right)} \end{aligned}$$

Für positive a ist der Bruch stets positiv, mit dem Vorfaktor $-\frac{1}{4}$ wird die rechte Seite also stets negativ. Daher hat die Gleichung in R keine Lösung, also keine Schnittpunkte.

2. Die Zahlen $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = 9 + 4i$ definieren eine erste Seite eines positiv orientierten Quadrats in der Gausschen Zahlenebene. Resultate in Normalform angeben.

a) Die Zahl z_3, die dem dritten Eckpunkt des Quadrats entspricht, kann sehr leicht aus einer Skizze herausgelesen werden. Zeigen Sie mit algebraischen Mitteln, dass für dieses z_3 die Seiten z_1z_2 und z_2z_3 gleich lang sind und senkrecht zueinander stehen.

$$\begin{aligned}
z_3 &= 7+8i \\
d_{23} &= |z_3 - z_2| \\
d_{23} &= |7+8i-(9+4i)| \\
d_{23} &= \sqrt{20} \\
d_{12} &= |z_2 - z_1| \\
d_{23} &= |9+4i-(5+2i)| \\
d_{23} &= \sqrt{20} \\
\varphi_{32} &= \arg(z_3 - z_2) = \arg(-2+4i) = 116.56\,^\circ \\
\varphi_{21} &= \arg(z_2 - z_1) = \arg(4+2i) = 26.565\,^\circ \\
\varphi_{32} - \varphi_{21} &= 90\,^\circ \\
\text{oder } m_{32} &= -2 \text{ und } m_{21} = \frac{1}{2} \\
m_{32} \cdot m_{21} &= -1\,,\ \text{also senkrecht}
\end{aligned}$$

b) Ein gewisser Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung berührt die Gerade, die durch z_1 und z_2 definiert ist. Bestimmen Sie den Radius exakt.

$$\begin{aligned}
g &: \quad -2x + 4y + c = 0 \\
Z_1\,(5|2) \text{ in g} &: \\
-10 + 8 + c &= 0 \\
c &= 2 \\
-2x + 4y + 2 &= 0 \\
\text{Hesse-Normal-Form} &: \\
\frac{-2x + 4y + 2}{\sqrt{20}} &= 0 \\
O(0|0) \text{ einsetzen} &: \\
r &= \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{5}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

c) Die oben angegebene Seite soll um 90° um den Punkt, der der Zahl z_1 entspricht, gedreht werden. Zeigen Sie wie auf diese Weise die Zahl z_4 , die dem vierten Eckpunkt entspricht, algebraisch berechnet werden kann, und geben Sie z_4 an.
Die Drehung eines Quadrats um $90\,^\circ$ um eine Ecke überführt eine dem Drehzentrum benachbarte Ecke in die andere. Aus z_2 wird also z_4.
Drehung um 90° entspricht einer Multiplikation mit i (dritte Alternative für Teilaufgabe a):

$$\begin{aligned}
z_4 - z_1 &= i \cdot (z_2 - z_1) = i \cdot (4+2i) = -2+4i \\
z_4 &= z_1 + (-2+4i) = 5+2i+(-2+4i) = 3+6i
\end{aligned}$$

d) Geben Sie die Gleichung des Umkreises dieses Quadrats in beliebiger Form an.
Die Mitte von z_1 und z_3 ist 6+5i, der Mittelpunkt des Kreises. Der Radius ist die halbe Diagonale des Quadrats also $\frac{1}{2}\sqrt{40} = \sqrt{10}$

$$k : (x-6)^2 + (y-5)^2 = 10$$

e) Die Eckpunkte des Quadrats werden mittels der Funktion $f : w = f(z) = z \cdot (12 - 5i) + 3i$ in die w-Ebene abgebildet. Den Zahlen $w_1 ... w_4$ entspricht wieder ein Quadrat. Um welchen Faktor ist sein Flächeninhalt grösser als der des alten Quadrats?
Bei f handelt es sich um eine Drehstreckung mit dem Faktor a=12-5i und eine Translation um 3i. Letztere verändert die Größe nicht. Der Betrag von $|a|$ gibt die Änderung der Längen an, $|a|^2$ also die der Flächen :

$$\frac{F_{neu}}{F_{alt}} = a^2 = |12-5i|^2 = 169$$

3. Gegeben ist die Kugel $K: x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-35=0$.

a) Bestimmen Sie ihren Mittelpunkt und ihren Radius r.

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z-35 &= 0\\
x^2-2x+y^2-6y+z^2+4z &= 35\\
\text{quadratische Ergänzung} &:\\
x^2-2x+1+y^2-6y+9+z^2+4z+4 &= 35+1+9+4\\
(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2 &= 49
\end{aligned}$$

Die Kugel hat den Mittelpunkt M(1|3|-2) und den Radius 7

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Kugel mit der Geraden $g: \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix}1\\9\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\text{g in K} &:\\
(1+2t-1)^2+(9-3t-3)^2+(6-2t+2)^2 &= 49\\
17t^2-68t+100 &= 49\\
t_1 &= 1, t_2 = 3\\
& \quad S_1\,(3|6|4)\,, S_2\,(7|0|0)
\end{aligned}$$

c) Liegt der Punkt P(7/6/-4) auf der Kugel K ? Geben Sie die Gleichung einer Ebene E_1 in Koordinatenform an, welche senkrecht zur Geraden MP steht und den Punkt P enthält.

$$\begin{aligned}
\text{P in K} &:\\
(7-1)^2+(6-3)^2+(-4+2)^2 &= 49\\
49 &= 49(w)\\
& \quad \text{P liegt auf K}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Ebene ist also Tangentialebene von K in P :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n_1} &= \overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix}1-7\\3-6\\-2+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\2\end{pmatrix}\\
E_1 &: -6x-3y+2z+d=0\\
\text{P in E}_1 &:\\
-6\cdot 7-3\cdot 6+2\cdot(-4)+d &= 0\\
d &= 68\\
E_1 &: -6x-3y+2z+68=0
\end{aligned}$$

d) Welchen Zwischenwinkel (auf ganze Grade gerundet) schliessen die beiden Tangentialebenen E_2 bzw. E_3 an die Kugel K in den Punkten U(4/9/0) bzw. V(3/9/1) ein?
Der Winkel zwischen den Ebenen ist der gleiche, wie der Winkel zwischen den Normalenvektoren, die sich aus den Verbindungsvektoren zum Mittelpunkt ergeben :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n_U} &= \overrightarrow{MU} = \begin{pmatrix}4-1\\9-3\\0+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}\\
\overrightarrow{n_V} &= \overrightarrow{MV} = \begin{pmatrix}3-1\\9-3\\1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\\
\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{n_U}\cdot\overrightarrow{n_V}}{n_U\cdot n_V} = \frac{\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}\right\|}\\
\cos\alpha &= \frac{48}{49} \Rightarrow \alpha = 12^\circ
\end{aligned}$$

e) Die Kugel schneidet die Ebene E_4 mit der Gleichung $x + 7y - 2z + 10 = 0$ in einem Schnittkreis k^* . Wie gross ist sein Radius r^*, und welches sind die Koordinaten M^* ?
Abstand von M zu E_4 mittels der HNF von E_4 :

$$\begin{aligned}
x + 7y - 2z + 10 &= 0 \\
\frac{x + 7y - 2z + 10}{\sqrt{54}} &= 0 \\
M(1|3|-2) \text{ einsetzen} &: \\
d &= \frac{1 + 7 \cdot 3 - 2\,(-2) + 10}{\sqrt{54}} \\
d &= 2\sqrt{6} \\
r^* &= \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{49 - 24} = 5
\end{aligned}$$

M^* erhält man, indem man den Normalenvektor von E_4 auf die Länge d bringt und vom Ortsvektor von M abzieht :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{M^*M} &= d\frac{\overrightarrow{n}_4}{n_4} = 2\sqrt{6}\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = 2\sqrt{6}\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{54}} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{r_{M^*}} &= \overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{M^*M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \\
& M^*\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{5}{3}\middle|-\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

4. a) Ein idealer Würfel wird 20-mal geworfen. Wie gross ist die WS, dass mehr als 4-mal eine Augenzahl erscheint, die grösser als 4 ist ?

$$\begin{aligned}
WS\,(\text{Augenzahl grösser 4}) &= WS\,(5)+WS\,(6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\\
WS\,(\text{20-mal und mehr als 4-mal Augenzahl} > 4) &= 1-WS\,(\text{20-mal und 0,1,2,3 oder 4-mal} > 4)\\
WS\,(20;k>4) &= 1-WS\,(20;k\leq 4)\\
WS\,(20;k>4) &= 1-\sum_{k=0}^{4}\binom{20}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{20-k}\\
WS\,(20;k>4) &= 1-0.151\,51=84.8\,5\%
\end{aligned}$$

b) Wie oft muss ein idealer Würfel geworfen werden, damit mit einer WS von über 99% mindestens einmal eine 6 darunter ist?

$$\begin{aligned}
WS\,(\text{mindestens einmal eine 6}) &> 99\%\\
1-WS\,(\text{keine 6}) &> 0.99\\
WS\,(\text{keine 6}) &< 0.01\\
\left(\frac{5}{6}\right)^{n} &< 0.01\\
n &> \frac{\log 0.01}{\log\left(\frac{5}{6}\right)}=25.259\\
n &\geq 26
\end{aligned}$$

c) Es werden nun 3 ideale Würfel miteinander geworfen. Wie gross ist die WS, dass die Augensumme genau 14 beträgt?
Die Augenzahlen, die in der Summe 14 geben sind : (6,6,2); (6,5,3); (6,4,4); (5,5,4)
(6,5,3) kann auf 6 verschiedene Weisen angeordnet werden (6,5,3); (6,3,5); (5,6,3)...,
die anderen 3 nur auf jeweils 3 (wegen der doppelt vorkommenden Ziffern).
Insgesamt also 15 verschieden Kombinationen. Somit ist :

$$WS\,(\text{drei Würfel geben Augensumme 14})=\frac{günstige}{mögliche}=\frac{15}{6^3}=\frac{5}{72}=6.94\%$$

d) Ein Spieler A zahlt einem Spieler B einen Einsatz E und darf dafür zwei Mal mit einem idealen Würfel würfeln. Spieler B zahlt ihm dann das Produkt der geworfenen Augenzahlen (in Franken) zurück. Wie hoch muss der Einsatz sein, damit keiner der beiden Spieler einen Vorteil hat?
Die WS für jedes Ergebnis ist gleich $\frac{1}{36}=p$. Der Erwartungswert für B ist :

$$\begin{aligned}
\mu &= p\cdot 1\cdot 1+p\cdot 1\cdot 2+p\cdot 1\cdot 3+...+p\cdot 6\cdot 6\\
\mu &= p\left(1\cdot\underbrace{(1+2+3+4+5+6)}_{=21}+2\cdot\underbrace{(1+2+..+6)}_{=21}+3\cdot\underbrace{(1+2..+6)}_{=21}+..6\cdot\underbrace{(1+2..+6)}_{=21}\right)\\
\mu &= p\,(1\cdot 21+2\cdot 21+3\cdot 21+..+6\cdot 21)\\
\mu &= p\cdot 21\,(1+2+3+4+5+6)=p\cdot 21^2\\
\mu-E &= 0 \text{ für ein faires Spiel}\\
p\cdot 21^2-E &= 0\\
E &= p\cdot 21^2=\frac{1}{36}21^2=\frac{49}{4}=12.25
\end{aligned}$$

e) Eine erste Urne enthält 2 rote und 2 blaue, eine zweite Urne 1 rote und 3 blaue Kugeln. In eniem Versuch wird zuerst eine Urne zufällig und geheim ausgewählt, dann werden aus dieser Urne zwei Kugeln zufällig und ohne Zurücklegen gezogen. Als Resultat ergaben sich im Versuch zwei verschiedenfarbige Kugeln. Wie gross ist die WS, dass die Kugeln aus der ersten Urne gezogen worden sind ?
Für die erste Urne ist die WS zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen $WS_1=2\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$
Für die zweite Urne ist die WS zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen $WS_2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

$$WS\,(\text{die verschiedenfarbigen Kugeln sind aus Urne 1})=\frac{WS_1}{WS_1+WS_2}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{4}{7}=57.1\%$$

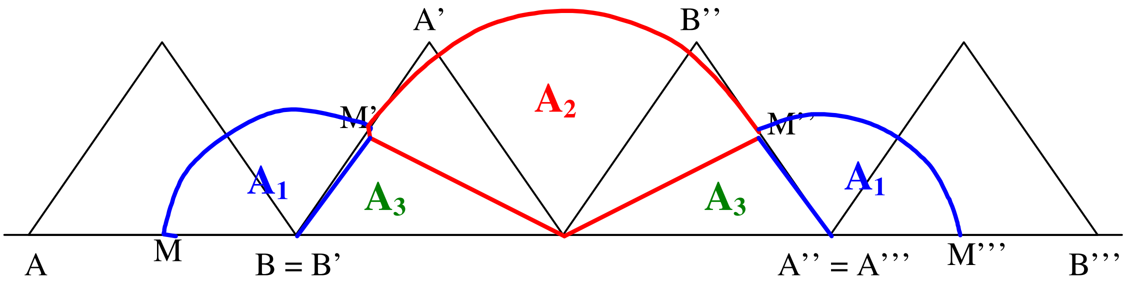

Figure 1: Grafik von Elias Villiger

5. Fünf von einander unabhängige Kurzaufgaben :
   a) In einer Ebene liegt ein gleichseitiges Dreieck ABC mit Seitenlänge a mit der Grundlinie AB auf einer Geraden g. Es wird längs der Geraden drei Mal im Uhrzeigersinn um die jeweilige rechte Ecke gekippt, bis die nächste Seite - und schliesslich die Grundlinie AB selber, wieder auf g liegt. Wie gross ist der Inhalt der Fläche, die von der Bahn des Mittelpunktes M der Grundlinie AB und der Geraden g eingeschlossen wird ?
   Der Drehwinkel ist bei allen drei Drehungen $120°$ $\left(\frac{1}{3}\text{ Vollkreis}\right)$.

   Bei der ersten und der dritten Drehung bewegt sich M auf einem Kreis mit Radius a/2 (A_1), bei der zweiten auf $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ (der Höhe des Dreiecks) A_2. Hinzu kommen noch zwei rechtwinklige Dreiecke (A_3).

$$Fläche = 2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \pi + 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{12}\pi a^2$$

   b) Für $log_{10}(x)$ wird auch $lg(x)$ geschrieben. Berechnen Sie, unter Anwendung der Logarithmengesetze $\sum_{k=1}^{k=99} \lg\left(\frac{k+1}{k}\right)$ exakt.

$$\sum_{k=1}^{k=99} \lg\left(\frac{k+1}{k}\right) = \lg\left(\prod_{k=1}^{k=99} \frac{k+1}{k}\right) = \lg\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{99}\right) = \lg 100 = 2$$

   c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.
   Bestimmung nach l'Hospital :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} \\ \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(-\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   d) Zeigen Sie, dass $F(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ist.
   F(x) ist Stammfunktion, wenn die Ableitung f(x) ergibt :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right)' \\ F'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\frac{\cos x\,(1-\sin x) - (1+\sin x)\,(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\ F'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1-\sin x}{\sin x + 1}\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2} \\ F'(x) &= \frac{1}{\sin x + 1}\frac{\cos x}{1-\sin x} \\ F'(x) &= \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = f(x) \end{aligned}$$

e) Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass $8^n - 1$ für jede natürliche Zahl n durch 7 teilbar ist.

Induktionsanfang n=1 :

$$8^1 - 1 = \text{7 ist durch 7 teilbar (w)}$$

Induktionsannahme :

$$8^n - 1 \text{ ist durch 7 teilbar}$$

Induktionsschritt :

$$8^{n+1} - 1 = \underbrace{8}_{8=7+1} \cdot 8^n - 1 = (7+1)\,8^n - 1 = 7 \cdot 8^n + 8^n - 1$$

$$8^{n+1} - 1 = \underbrace{\underbrace{7 \cdot 8^n}_{\text{durch 7 teilbar}} + \underbrace{8^n - 1}_{\text{nach Voraussetzung durch 7 teilbar}}}_{\text{durch 7 teilbar}} \quad (w)$$

Somit kann man beginnend bei n=1 mit dem nun bewiesenen Induktionsschritt zu jeder beliebigen natürlichen Zahl n gelangen und hat somit gezeigt, dass $8^n - 1$ für jede natürliche Zahl n durch 7 teilbar ist.