Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Herbst 2007 Zürich Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung, Graphik-Taschenrechner ohne Computer–Algebra–System.
- Resultate wo möglich vereinfacht und exakt, sonst sinnvoll gerundet angeben.
- Lösungswege müssen überall klar ersichtlich und wo nötig kommentiert sein.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für Note 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einer neuen Seite.

---

1. Gegeben ist die Gleichung $f_a(x)=\dfrac{a^3}{a^2+4x^2}$ einer Funktion f_a, wobei a ein positiver, reeller Parameter ist.

 a) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)\,dx$ für $a=1$.

 b) Beweisen Sie, das der Graph von f_a für jedes a immer genau einen Extremalpunkt hat und dass dieser Extremalpunkt ein Hochpunkt ist.

 c) Der Graph der Funktion f_a hat im ersten Quadranten für jedes a genau einen Wendepunkt. Berechnen Sie allgemein dessen – von a abhängigen – Koordinaten und geben Sie die Funktionsgleichung $h(x)=...$ der Kurve an, auf der alle diese Wendepunkte liegen.

 d) Die Funktion f_a soll für $a=2$ durch eine quadratische Funktion g so angenähert werden, dass beide Funktionen an der Stelle $x=0$ sowohl im Funktionswert als auch in den ersten beiden Ableitungen übereinstimmen. Wie heisst die Funktionsgleichung dieser Funktion g?

 e) Zeigen Sie, dass sich zwei zu verschiedenen positiven Werten des Parameters a gehörige Graphen von f_a nicht schneiden.

---

2. Die Zahlen $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = 9 + 4i$ definieren eine erste Seite eines positiv orientierten Quadrats in der Gauss'schen Zahlenebene. Resultate in Normalform angeben:

 a) Die Zahl z_3, die dem dritten Eckpunkt dieses Quadrats entspricht, kann sehr leicht aus einer Skizze herausgelesen werden. Zeigen Sie mit algebraischen Mitteln, dass für dieses z_3 die Seiten z_1z_2 und z_2z_3 gleich lang sind und senkrecht aufeinander stehen.

 b) Ein gewisser Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung berührt die Gerade, die durch z_1 und z_2 definiert ist. Bestimmen Sie dessen Radius exakt.

 c) Die oben gegebene erste Seite soll um 90° um den Punkt, der der Zahl z_1 entspricht, gedreht werden. Zeigen Sie, wie auf diese Weise die Zahl z_4, die dem vierten Eckpunkt des Quadrats entspricht, algebraisch berechnet werden kann, und geben Sie z_4 an.

 d) Geben Sie eine Gleichung des Umkreises dieses Quadrats – in beliebiger Form – an.

 e) Die Eckpunkte des Quadrats werden mittels der Funktion f: $w = f(z) = z \cdot (12 - 5i) + 3i$ in die w–Ebene abgebildet. Den Zahlen w_1, w_2, w_3 und w_4 in der w–Ebene entspricht wieder ein Quadrat. Um welchen Faktor ist sein Flächeninhalt grösser als der des alten Quadrats?

(Bitte wenden!)

3. Gegeben ist die Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z - 35 = 0$.

a) Bestimmen Sie ihren Mittelpunkt M und ihren Radius r.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Kugel mit der Geraden g: $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) Liegt der Punkt P(7/6/–4) auf der Kugel K? Geben Sie die Gleichung einer Ebene E_1 in Koordinatenform an, welche senkrecht zur Geraden (MP) steht und diesen Punkt P enthält.

d) Welchen Zwischenwinkel (auf ganze Grade gerundet) schliessen die beiden Tangentialebenen E_2 resp. E_3 an die Kugel K in den Punkten U(4/9/0) respektive V(3/9/1) ein?

e) Die Kugel K schneidet die Ebene E_4 mit der Gleichung $x + 7y - 2z + 10 = 0$ in einem Schnittkreis k*. Wie gross ist sein Radius r*, und welches sind die Koordinaten seines Mittelpunkts M*?

---

4. a) Ein idealer Würfel wird 20–mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 4–mal eine Augenzahl erscheint, die grösser ist als 4?

b) Wie oft muss ein idealer Würfel geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens ein Mal eine 6 darunter ist?

c) Es werden nun drei ideale Würfel miteinander geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme genau 14 beträgt?

d) Ein Spieler A zahlt einem Spieler B einen Einsatz und darf dafür darf zwei Mal mit einem idealen Würfel würfeln. Spieler B zahlt ihm dann das Produkt der geworfenen Augenzahlen – in Franken – zurück. Wie hoch muss der Einsatz sein, damit keiner der beiden Spieler einen Vorteil hat?

e) Eine erste Urne enthält 2 rote und 2 blaue, eine zweite Urne 1 rote und 3 blaue Kugeln. In einem Versuch wird zuerst eine Urne zufällig und geheim ausgewählt, dann werden aus dieser Urne zwei Kugeln zufällig und ohne Zurücklegen gezogen. Als Resultat ergaben sich im Versuch zwei verschiedenfarbige Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugeln aus der ersten Urne gezogen worden sind?

---

5. Fünf von einander unabhängige Kurzaufgaben:

a) In einer Ebene liegt ein gleichseitiges Dreieck ABC mit Seitenlänge a mit der Grundlinie AB auf einer Geraden g. Es wird längs dieser Geraden drei Mal im Uhrzeigersinn um die jeweilige rechte Ecke gekippt, bis die nächste Seite – und schliesslich die Grundlinie AB selber – wieder auf g liegt. Wie gross ist der Inhalt der Fläche, die von der Bahn des Mittelpunktes der Grundlinie AB und der Geraden g eingeschlossen wird?

b) Für $\log_{10}(x)$ wird auch lg(x) geschrieben. Berechnen Sie, unter Anwendung der Logarithmengesetze, $\sum_{k=1}^{99} \lg(\frac{k+1}{k})$ exakt.

c) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$.

d) Zeigen Sie, dass $F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ ist.

e) Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass $8^n - 1$ für jedes natürliche n durch 7 teilbar ist.

(Ende)