

Mathematik Typus C bzw. erweitertes Niveau

Jede Aufgabe wird mit 12 Punkten bewertet.
Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1: A(2/ -4/ 3)$, $B(0/2/ -2)$, $C(2/ -6/5)$ und $E_2: x - y + 2z = 15$.
 - a) Zeigen Sie, dass der Nullpunkt des Koordinatensystems auf E_1 liegt und berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Ebenen.
 - b) Bestimmen Sie die Gleichungen jener Kugeln mit Radius $R = 9$, welche E_1 im Nullpunkt berühren.
 - c) Zeigen Sie, dass genau eine der beiden Kugeln von E_2 in zwei Teile geschnitten wird, und bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Teilmengen.

2. Gegeben ist die Kurve K mit der Gleichung $y = \frac{a^2}{x} - 4x$ ($a > 0$).
 - a) Bestimmen Sie die Symmetrie und die Asymptoten von K . Wählen Sie für den Rest der Aufgabe a so, dass die Kurve die x -Achse im Abstand 2 vom Nullpunkt schneidet und skizzieren Sie die Kurve.
 - b) Welcher Kurvenpunkt P liegt am nächsten beim Nullpunkt?

3. Gegeben ist die Funktion $f: f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$.
 - a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Asymptoten des Graphen von f . Zeichnen Sie den Graphen.
 - b) Beweisen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch ist und geben Sie das Symmetriezentrum an.
 - c) In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet die Tangente an den Graphen im Punkt $P(1/?)$ die x -Achse?
 - d) Die x -Achse, der Graph von f sowie die Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = u$, $u < -1$, schliessen ein Flächenstück ein. Berechnen Sie dessen Inhalt $A(u)$ sowie den Grenzwert von $A(u)$ für $u \rightarrow -\infty$.

4. 1. Gegeben ist die Abbildung f der komplexen z -Ebene in die komplexe w -Ebene:

$$f: z \rightarrow w = 2 \cdot \bar{z} \cdot (i - z)$$

- a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung.
- b) Die Halbgerade g sei Winkelhalbierende des 1. Quadranten der z -Ebene (45° -Gerade).
Bestimmen Sie das Bild von g bei der Abbildung f und zeichnen Sie dieses Bild mit 1 LE = 8 Häuschen.
2. Gegeben ist eine lineare Abbildung durch ihre

$$\text{Darstellungsmatrix } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix A .
- b) Deuten Sie diese Eigenvektoren sowie die gegebene Abbildung A geometrisch.
5. In einer grossen Klinik werden in der Regel täglich 6 Geburten gezählt. Es werde angenommen, dass alle 6 Kinder zufällig (d. h. mit gleicher Wahrscheinlichkeit) in einer der 3 gleich langen Tagesschichten „Morgen“, „Mittag“ oder „Abend“ geboren werden.
- a) Auf wie viele Arten können sich die 6 Neugeborenen auf die 3 Tagesschichten verteilen?
- b) Wie viele gleichmässige Verteilungen auf die Schichten gibt es?
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es mindestens eine Tagesschicht ohne eine einzige Geburt?
- d) Ein Assistenzarzt hat am Wochenende in der Mittagsschicht Dienst. Er interessiert sich nur dafür, ob samstags oder sonntags eine Geburt in seine Mittagsschicht fällt oder nicht.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen mehr als die Hälfte aller 12 Wochenendgeburten in die Mittagsschichten?