

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Die maximale Punktesumme braucht für die Note 6 nicht erreicht zu werden.

MATHEMATIK

TYPUS C und ERWEITERTES NIVEAU

1. Gegeben ist die von einem Parameter a abhängige Funktion f_a mit der Gleichung

$$f_a(x) = \frac{4}{1+a^2x^2} - 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

- a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der vom Graphen von f_a und der x -Achse begrenzten Fläche.
- b) Für welchen Parameterwert a schneidet der Graph von f_a die x -Achse unter einem Winkel von 45° ?
- c) Das im ersten Quadranten liegende Stück des Graphen von f_a wird um die y -Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des auf diese Weise definierten Rotationskörpers.

2. Von einem geraden Kreiskegel kennt man die Spitze $S(4,5,19)$ und die Gleichung der Grundkreisebene E des Kegels. $E: x + y + 4z - 13 = 0$. $A(x_A, -1, 4)$ ist ein Punkt des Grundkreisrandes.

- a) Berechnen Sie das Zentrum M und den Radius des Grundkreises.
- b) Für welchen Punkt des Grundrisses ist der Abstand zum Grundkreis minimal?
- c) E wird um die Gerade AM gedreht, so dass der Ursprung in der gedrehten Ebene liegt. Wie gross ist der minimale Drehwinkel?

3. a) Zeigen Sie, dass $z_1 = 2 - i$ eine Lösung der Gleichung $z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 32z + 15 = 0$ ist und bestimmen Sie die übrigen Lösungen.
- b) w_1, w_2, w_3 und w_4 bilden eine Folge von komplexen Zahlen, mit $w_1 = 0$ und $w_n = i \cdot w_{n-1} - 1$ für $n = 2, 3, 4$.
Berechnen Sie die vier Glieder.
- c) Stellen Sie die vier Lösungen aus a) und die vier Glieder der Folge aus b) in der komplexen Zahlenebene grafisch dar.
- c) Bestimmen Sie die Drehstreckung, welche das Viereck (im Gegenuhrzeigersinn beschriftet), bestehend aus den vier Lösungen in a) auf das Viereck w_1, w_2, w_3, w_4 abbildet, wobei z_1 in w_1 übergeht, und berechnen Sie den Drehwinkel, den Streckfaktor sowie das Zentrum der Drehstreckung.

4. Diese Aufgabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

a) In einer Urne sind 9 weisse, 7 rote und 4 schwarze Kugeln.

a1) Man zieht ohne zurückzulegen nacheinander 3 Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a11) genau eine der gezogenen Kugeln weiss ist?

a12) mindestens eine der gezogenen Kugeln nicht rot ist?

a2) Man zieht ohne zurückzulegen nacheinander 2 Kugeln. Die zweite gezogene Kugel ist schwarz. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot war?

b) Bei der Fluggesellschaft Safeair werden für 300 Plätze 328 Buchungen getätigt. Aus Erfahrung weiss das Management, dass 10% der Passagiere den Flug annullieren. Welches Risiko nimmt das Management in Kauf, Fluggäste abweisen zu müssen?

5. Diese Aufgabe besteht aus voneinander unabhängigen Kurzaufgaben.

a) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

b) Beweisen Sie, dass die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{e^x + 1}$ symmetrisch ist bezüglich der y -Achse.

c) Gegeben ist ein Kreissektor mit dem spitzen Zentriwinkel α . Diesem Sektor wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass zwei Ecken auf dem Bogen des Sektors liegen. Wie gross ist der Winkel φ zwischen dem Radius, der in einer dieser Ecken endigt, und der Winkelhalbierenden des Sektors, wenn der Flächeninhalt des Rechtecks maximal ist?