

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche,  $\pi$ , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Die maximale Punktesumme braucht für die Note 6 nicht erreicht zu werden.

## MATHEMATIK

## TYPUS C

- Gegeben ist die Funktion  $f(x) = (x+t)e^{t-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und  $G_f$  sei ihr Graph.
  - Wenn  $t$  die reellen Zahlen durchläuft, bewegt sich der Hochpunkt von  $G_f$  auf einer Kurve  $K$ . Bestimmen Sie die Gleichung von  $K$ .
  - Für welchen Wert von  $t$  liegt der Wendepunkt von  $G_f$  auf der  $y$ -Achse?
  - Die dritte Ableitungsfunktion von  $f$  hat die Gleichung  $f^{(3)}(x) = -e^{t-x}(t+x-3)$ . Vermuten Sie eine allgemeine Formel für die Gleichung der  $n$ -ten Ableitungsfunktion von  $f$  und beweisen Sie die Formel mit vollständiger Induktion.
  - Es sei  $x_0$  die Nullstelle von  $f$ . Bestimmen Sie  $J(u) = \int_{x_0}^u f(x) dx$ ;  $u > x_0$  und danach  $\lim_{u \rightarrow \infty} J(u)$ .
- Gegeben sind die Gerade  $g$ , die Ebene  $E$  und die Kugel  $K$ .  
 $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3+3t \\ -3+4t \\ -7+2t \end{pmatrix}$ ;  $E: 4x + y + 8z - 49 = 0$ ;  $K: (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-9)^2 = 169$ 
  - Beweisen Sie, dass die Gerade  $g$  Kugeltangente ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes  $P$ .
  - Bestimmen Sie die Parametergleichung derjenigen Tangente an  $K$  im Punkt  $P$ , die parallel zu  $E$  ist.
  - Die Ebene  $E$  schneidet die Kugel  $K$  in einem Kreis  $k$ . Berechnen Sie die Mittelpunktskoordinaten und den Radius von  $k$ .
- Gegeben ist die komplexe Funktion  $w = f(z) = z - \frac{3}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Es bezeichne  $w = f(z) = u + iv$ .
  - Welche Punkte der  $z$ -Ebene werden auf  $w = 4i$  abgebildet?
  - Bestimmen Sie das Bild des Einheitskreises und skizzieren Sie das Bild in der  $w$ -Ebene.
  - Bestimmen Sie das Bild der Geraden  $z = t(1+i)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und skizzieren Sie das Bild in der  $w$ -Ebene.

4. Unter 20 Losen hat es noch genau 5 Treffer.  
Jemand kauft 4 Lose nacheinander.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst das vierte Los ein Treffer ist?
  - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Treffer gezogen wurde?
  - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das fünfte gezogene Los ein Treffer ist, wenn unter den vier vorangehenden Losen höchstens ein Treffer gezogen wurde?
  - Wie viele Treffer müsste es unter den verbleibenden 16 Losen noch mindestens haben, dass beim Kauf zweier Lose die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer grösser als  $\frac{1}{2}$  ist?

5. Einem Drehkegel mit halbem Öffnungswinkel  $\alpha$ ,  
 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  wird eine Kugel einbeschrieben. Die Kugel

wird mit dem Drehkegel der Höhe 1 geschnitten.

- Für welchen Kugelradius hat der Schnittkörper maximalen Oberflächeninhalt?
- Für welche Winkel  $\alpha$  ist der Schnittkörper aus a) eine Kugel?

