

Mathematik (Typus C)

Bemerkungen:

- Jede Aufgabe wird mit maximal 12 Punkten bewertet.
- Für die Note 6 müssen mindestens 54 Punkte erzielt werden.
- Zeitbudget: 4 mal 60 Minuten

1. Gegeben sind die Punkte $A(4/6/-5)$, $B(6/10/-1)$, $C(10/12/-5)$, $D(8/8/-9)$

sowie die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Zeigen Sie, dass die Punkte A,B,C,D ein Quadrat bilden.
- Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g mit der Ebene ABCD.
- Bestimmen Sie die Spitze einer geraden Pyramide mit Grundfläche ABCD so, dass ihr Volumeninhalt 108 beträgt.
- M sei der Mittelpunkt der Quadratfläche.
Welche Kugeln berühren die Quadratfläche in M und besitzen die Gerade g als Tangente.

2. Gegeben ist die Kurvenschar $K_p: y = \frac{2\sqrt{x-2}}{x^p}$; $p > 0, \text{ const}$

- Bestimmen sie den Definitionsbereich, die Schnittstelle mit der x-Achse, den Schnittwinkel mit der x-Achse und diskutieren sie das Verhalten am Rande des Definitionsbereichs in Abhängigkeit von p.
- Die Fläche zwischen der Kurve K_p und der x-Achse rotiert um die x-Achse und überstreicht dabei einen Rotationskörper.
Untersuchen Sie, für welche Werte von p das Volumen dieses Rotationskörpers endlich ist und geben Sie diesen endlichen Wert an.

3. Wir betrachten den Kreis mit Mittelpunkt $M(0/0)$ und Radius $r = 2$. Die Punkte M , $A(0/1)$ und der Kreispunkt $P(x/y)$ bilden ein Dreieck. Der Winkel bei P heisst ϕ .
- Bestimmen Sie ϕ für den Kreispunkt $P_1(1/ \quad)$.
 - Wir betrachten alle Kreispunkte P im 1. Quadranten. Für welchen dieser Punkte wird ϕ am grössten?
4. Gegeben ist die komplexe Abbildung $z \rightarrow w = \frac{a \cdot z - 2}{z^2}$; $a \in \mathbb{C}$.
- Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung für $a = 0$.
 - Bestimmen Sie den Definitionsbereich und wählen Sie für das Folgende den komplexen Parameter a so, dass i auf 4 abgebildet wird.
 - Bestimmen das Bild der positiven reellen Achse. Geben Sie die Gleichung, die Art und die Eigenschaften der Bildkurve in der w -Ebene an. Skizze mit 1 LE $\hat{=} 2$ Häuschen.
 - Bestimmen das Bild der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten. Geben Sie die Gleichung, die Art und die Eigenschaften der Bildkurve in der w -Ebene an. Skizze mit 1 LE $\hat{=} 4$ Häuschen..
5. Insgesamt 5 Bahnreisende besteigen einen SBB-Wagen, der 5 Abteile mit je 6 Plätzen umfasst. Jeder Reisende wählt von den 5 Abteilen zufällig eines aus.
- Auf wieviele verschiedene Arten können die 5 Reisenden die 5 Abteile auswählen?
 - Der erste Reisende habe in einem Abteil Platz genommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählen von den restlichen 4 Reisenden genau 2 dasselbe Abteil wie der erste?
 - Wenn die 5 Reisenden die Abteile zufällig auswählen, können Abteile leer bleiben.
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleibt höchstens eines leer?
 - Wieviele Abteile bleiben im Mittel leer?