



Schweizerische Maturitätsprüfung

Zürich, Winter 2018

M A T H E M A T I K

Erweitertes Niveau

Kand.-Nr.:

.....

Name, Vorname:

.....

Erreichte Punktzahl:

.....

Note:

.....

Visum Korrigierende(r):

.....

Fach:

Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau

Dauer:

4 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel:

Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Vorgaben
der Schweizerischen Maturitätskommission SMK

Maximale Punktzahl:

75 Punkte

Autoren:

H.U. Keller / J. Zinn

Fachspezifische Anweisungen:

Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder der fünf Aufgaben soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 15 Punkten bewertet. Insgesamt sind 75 Punkte erreichbar.

1 Analysis

Betrachten Sie die Funktionen $f: y = a \cdot e^x$ und $g: y = x$.

- Für $a = 1$ wird der Graph von f , zwischen $x = 0$ und $x = 1$, um die x -Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des dadurch definierten Rotationskörpers.
 - Bestimmen Sie nun den Parameter a so, dass der Graph von f den Graphen von g berührt. Hinweis: f und g haben im Berührungspunkt B die gleiche Steigung.
 - Wie gross ist das endliche Flächenstück, das von dem in b) gefundenen Graphen von f , dem Graphen von g und der y -Achse eingeschlossen wird?
 - Spiegeln Sie den in b) gefundenen Graphen von f am Graphen von g , und geben Sie die Gleichung der gespiegelten Kurve f^* an.
 - Zeichnen Sie, für $(-1) \leq x \leq 5$ und $(-1) \leq y \leq 5$, die Graphen von f , g und f^* alle in einem einzigen Koordinatensystem ein. Verwenden Sie für die Einheit auf jeder Achse jeweils 2 Häuschen.
-

2 Komplexe Zahlen

Gegeben ist die Gleichung $z^6 = 64i$.

- Berechnen Sie – ohne Verwendung des TR – eine erste Lösung dieser Gleichung.
- Zeichnen Sie alle Lösungen dieser Gleichung in einer Gauss'schen Zahlenebene ein.
- Berechnen Sie die Summe aller Lösungen.
- Berechnen Sie das Produkt aller Lösungen.

Betrachten Sie weiter die Menge M aller komplexen Zahlen z , für die gilt:

$$2 \leq |z| \leq 4 \text{ und } |z - (3+4i)| \leq 5.$$

- Schraffieren Sie diese Menge M in einer Gauss'schen Zahlenebene.
-

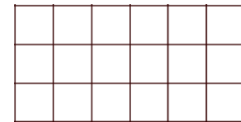
3 Vektorgeometrie

Gegeben sind die Punkte $M(1/3/4)$, $A(5/-1/-3)$ und $B(2/11/0)$. M ist der Mittelpunkt einer Kugel; die Punkte A und B liegen auf dem Äquator der Kugel.

- Berechnen Sie die Koordinaten beider Pole der Kugel. Der Pol mit drei positiven Koordinaten ist der Nordpol der Kugel.
- Gesucht ist die Gleichung der Tangentialebene im Nordpol in kartesischer Form.
- Geben Sie eine Vektorgleichung der Tangente an den Äquator im Punkt A an.
- Berechnen Sie denjenigen Punkt P auf der verlängerten Kugelachse über dem Nordpol, von dem aus die ganze Kugel unter einem Sehwinkel von $2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \approx 38.94^\circ$ erscheint.
- Welcher Bruchteil einer Kugeloberfläche kann ganz allgemein von einem Punkt aus überblickt werden, dessen Abstand vom Kugelmittelpunkt gleich dem doppelten Kugelradius ist?

4 Stochastik

Jedes der 18 Felder des rechts skizzierten Rechtecks wird entweder mit schwarzer oder mit weisser Farbe bemalt.



- Wie viele verschieden bemalte Rechtecke sind möglich?
- Wie viele verschiedene Rechtecke mit 10 weissen und 8 schwarzen Feldern gibt es?
- Jedes Feld werde zufällig – entsprechend dem Ausfall eines Münzenwurfs – schwarz oder weiss bemalt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es auf diese Weise mindestens eine Spalte (3 übereinander liegende Felder) gibt, die schwarz ist.
- Sie haben ein Rechteck mit 10 weissen und 8 schwarzen Feldern vor sich. Darauf werfen Sie zufällig 12 Sandkörner. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 dieser Sandkörner in einem schwarzen Feld zu liegen kommen?
- Auf ein anders bemaltes Rechteck werden nun wieder zufällig 2 Sandkörner geworfen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eines davon auf einem weissen und das andere auf einem schwarzen Feld zu liegen kommt, ist gleich $\frac{5}{18}$. Wie viele Felder dieses Rechtecks sind schwarz bemalt?

5 Fünf voneinander unabhängige Aufgaben

- Für gewisse Paare (x, y) darf $\lg(x+y)$ interessanterweise durch $\lg(x \cdot y)$ ersetzt werden, ohne dass sich ein Fehler ergeben würde. Gibt es ein solches Paar (x, y) , wenn $x = \frac{21}{4}$ gewählt wurde? Wie gross müsste dann y sein?

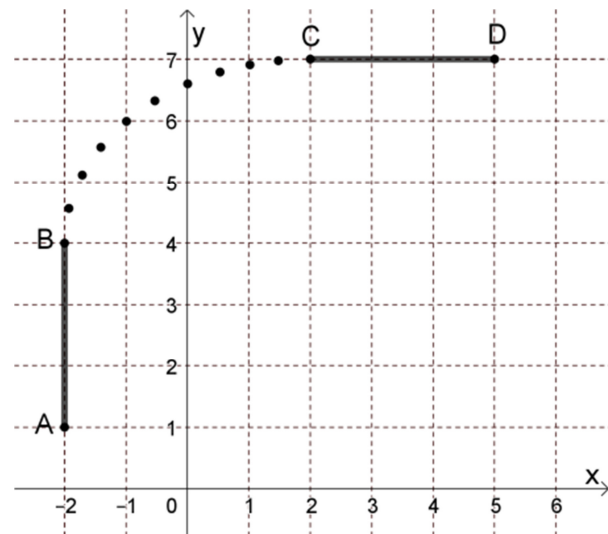
b) Ein Physiker möchte in einer Berechnung den korrekten Term $A = \frac{1}{1-x}$ durch den einfacheren linearen Term $B = 1 + x$ ersetzen, falls dabei der Absolutwert des relativen Fehlers r , also $|r| = \left| \frac{B-A}{A} \cdot 100\% \right|$, unter 10 % bleiben würde. Für welche x ist das der Fall?

c) Von zwei für alle reellen x definierten Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ sei bekannt:

$$(u(x))' = v(x), \text{ und } (v(x))' = u(x), \text{ und } u(0) = 0, \text{ und } v(0) = 1.$$

Leiten Sie $g(x) := (v(x))^2 - (u(x))^2$ ab und vereinfachen Sie $(g(x))'$ so weit wie möglich. Berechnen Sie weiter $g(0)$. Was lässt sich aus all diesem für $g(x)$ folgern?

d) Das Strassenstück AB in nebenstehendem Plan soll durch ein passendes Ellipsenstück (durch Punkte angedeutet) ohne Knicke mit dem Strassenstück CD verbunden werden. Geben Sie die Gleichung dieser Ellipse an.



e) Beweisen Sie diese für alle natürlichen Zahlen n geltende Formel:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

– Ende –