



Schweizerische Maturitätsprüfung

Zürich und Basel, Winter 2017

M A T H E M A T I K

Erweitertes Niveau

Kand.-Nr.:

.....

Name, Vorname:

.....

Erreichte Punktzahl:

.....

Note:

.....

Visum Korrigierende(r):

.....

Fach:

Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau

Dauer:

4 Stunden

Zugelassene Hilfsmittel:

Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Maximale Punktzahl:

75 Punkte

Autoren:

H.U. Keller / J. Zinn

Fachspezifische Anweisungen:

Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder der fünf Aufgaben soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 15 Punkten bewertet. Insgesamt sind 75 Punkte erreichbar. Ab 62 Punkten wird die Note 6 erteilt.

1 Analysis

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, mit Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$ ist.

- a) Beweisen Sie, dass der Graph dieser Funktion immer genau einen Wendepunkt aufweist.
 - b) Welche Bedingung(en) müssen diese Parameter erfüllen, damit der Graph dieser Funktion genau zwei Stellen mit jeweils horizontaler Tangente aufweist?
 - c) Bestimmen Sie für $a = -\frac{1}{4}, b = 0, c = 1, d = 0$ den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das im ersten Quadranten vom Graphen dieser speziellen Funktion und der x -Achse begrenzt wird.
 - d) Die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x$ schneidet den Graphen der in der Teilaufgabe c) gegebenen speziellen Funktion in einem Punkt S , der eine positive x -Koordinate aufweist. Berechnen Sie diese, von m abhängige, x -Koordinate.
 - e) Bestimmen Sie m so, dass die in Teilaufgabe d) definierte Gerade den Inhalt des in c) definierten Flächenstück halbiert.
-

2 Komplexe Zahlen

Die Eulersche Formel $e^{i\varphi} \equiv \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ gilt für beliebige Winkel φ ; für $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ wird abgekürzt auch $\text{cis}(\varphi)$ geschrieben.

- a) Beweisen Sie, dass $z^2 - \bar{z}^2$ imaginär ist. P. S.: Null ist sowohl reell als auch imaginär.
- b) Vereinfachen Sie den Term $\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ mit Hilfe der Eulerschen Formel und anschliessend unter Ausnützung von Eigenschaften der Winkelfunktionen so weit wie möglich.

- c) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 27 \operatorname{cis}(216^\circ)$ in Polarform an.
- d) Für den folgenden Grenzwert gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = e^i$. Berechnen Sie, sinnvoll gerundet, den reellen Betrag r der Differenz von $z_{10} = \left(1 + \frac{i}{10}\right)^{10}$ und diesem Grenzwert e^i .
Welcher Bruchteil (in %) des Betrages des Grenzwertes ist dieser Betrag r ?
- e) Schraffieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene das Gebiet, in dem alle komplexen Zahlen z liegen, für die sowohl $|z - (5 + 4i)| \leq 3$ als auch $|z - (10 + 6i)| \leq 4$ gilt.

3 Vektorgeometrie

Die vier Punkte $A(0/0/0)$, $B(-1/32/15)$, $C(27/11/20)$ und $D(-4/3/35)$ definieren eine dreiseitige Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze D .

- a) Berechnen Sie alle Winkel im Dreieck ABC .
- b) Beweisen Sie, dass diese Pyramide ein reguläres (normales) Tetraeder ist.
- c) Geben Sie eine kartesische Gleichung der Ebene E an, in welcher die Grundfläche ABC liegt.
- d) Berechnen Sie die Koordinaten des Umkugelmittelpunktes U dieses Tetraeders.
Tipp: Einerseits teilt U alle Höhen des Tetraeders im Verhältnis $3 : 1$, andererseits ist U aber auch der Schwerpunkt aller vier Ecken.
- e) Eine Schnittebene E_S parallel zur Ebene E (s. Teilaufgabe c)!) halbiert das Volumen des Tetraeders. Berechnen Sie, sinnvoll gerundet, die Koordinaten des Punktes H , in welchem diese Ebene E_S die Höhe des Tetraeders schneidet.

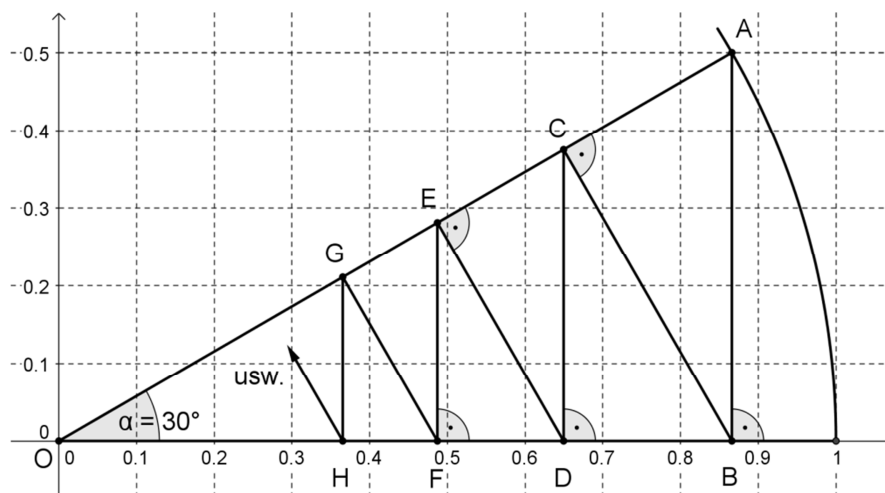
4 Stochastik

Ein spezieller Laplace-Würfel vom Typ A zeigt die sechs Augenzahlen 2, 3, 4, 5, 6, 6; ein spezieller Laplace-Würfel vom Typ B zeigt die Augenzahlen 2, 4, 4, 6, 6, 6.

- a) Sie werfen zwei A-Würfel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine Augensumme grösser als 10 zu erhalten?
- b) Wie oft müssen Sie einen A-Würfel werfen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine 6 zu erhalten, grösser als 0.99 ist?
- c) Sie werfen 12 Mal einen B-Würfel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dabei genau 4 Mal eine 4 würfeln?
- d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie in 12 Würfen mit einem B-Würfel mindestens zwei Mal eine 4 würfeln?
- e) In einer Schachtel liegen A-Würfel und B-Würfel, insgesamt 6 Stück. Genau n Würfel sind A-Würfel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit W_{66} für eine Doppelsechs in Abhängigkeit von n . Wie viele A-Würfel sind in der Schachtel, wenn $W_{66} = 2/9$ ist?

5 Fünf voneinander unabhängige Aufgaben

- a) Betrachten Sie die Funktion $y = x^2 + c$ für $x \geq 0$. Der Graph dieser Funktion berührt den Graphen ihrer Umkehrfunktion. Skizzieren Sie diese Situation grosszügig und berechnen Sie anschliessend den Berührungspunkt B und die positive Konstante c .
- b) Der Punkt $P(4/3)$ der $x-y$ -Ebene wird um 24° im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung gedreht. Berechnen Sie, je auf 3 Stellen gerundet, die Koordinaten des gedrehten Punktes P^* .
- c) Der Graph der Funktion $f(x) = x^{3/2} \cdot (2-x)$ im Intervall $x \in [0; 2]$ wird um die x -Achse rotiert. Berechnen Sie das Volumen des dadurch definierten Rotationskörpers.
- d) Wie gross ist die gesamte Länge der unten gezeichneten Zick-Zack-Linie, bestehend aus unendlich vielen Teilstrecken, von A über B nach C, D, E, F, G, H, und so weiter? Wie muss α (statt 30°) gewählt werden, damit diese Gesamtlänge gleich 2 wird?



- e) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:
Für jede natürliche Zahl n ist $4n^3 - n$ durch drei teilbar.

– Ende –