Schweizerische / Eidg. Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Frühling 2005, Bern Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau (Schweiz. Maturitätsprüfung)

bzw. Typus C (Eidg. Maturitätsprüfung)

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung, Graphik-Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System.
- Resultate so einfach wie möglich (vorzugsweise exakt, sonst sinnvoll gerundet) angeben.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einem neuen Blatt.

---

1. Betrachten Sie Ellipsen mit Halbachsen a und b, wobei jeweils a parallel zur x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegt.
   a) Geben Sie die Gleichung der Ellipse mit Mittelpunkt M(2/3), a = 9 und b = 7 an.
   b) Zeigen Sie, dass unter allen Ellipsen, bei denen die Summe a + b = 1 = konst. ist, der Kreis maximalen Flächeninhalt hat. Die Formel für den Flächeninhalt gilt als bekannt.
   c) Die Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung O(0/0), a = 6 und b = 3 wird um die x-Achse rotiert, wodurch ein Rotationsellipsoid entsteht. Berechnen Sie sein Volumen als Volumen eines Rotationskörpers mit Hilfe eines Integrals.
   d) Berechnen Sie die Steigung der Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung O(0/0), a = 5 und b = 3 im ersten Quadranten an der Stelle x = 4.
   e) Betrachten Sie nun alle Ellipsen mit Mittelpunkt O(0/0), bei denen das Produkt $a \cdot b = 1$ = konst. ist. Wie muss a gewählt werden, damit im ersten Quadranten an einer vorgegebenen Stelle $x_o > 0$ der zugehörige y-Wert extremal wird?

---

2. Als Normalform der Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird $z = u + \mathbf{i}\,v$ (mit u, v reell, $\mathbf{i}^2 = (-1)$) bezeichnet.
   a) Lösen Sie $z^3 = \mathbf{i}$ (Lösungen in Normalform), ohne den Taschenrechner zu verwenden.
   b) Welches ist die Wertemenge $\mathbb{W}$ der Funktion mit der Gleichung $f(z) = z^2 + 2$, wenn die Definitionsmenge $\mathbb{D} = \{z = u + \mathbf{i}\,v \mid u = v \text{ und } u \text{ reell}\}$ vorgegeben ist?
   c) $z_1 = \mathbf{i}$ und $z_2 = 1 + 2\mathbf{i}$ sind Fixpunkte der Funktion mit der Gleichung $g(z) = z^2 + a\,z + b$. Bestimmen Sie die komplexen Zahlen a und b je in Normalform.
   d) Geben Sie die Gleichung f(z) = ... der Funktion an, die in der komplexen Ebene einer Drehstreckung um 30° um den Punkt $z = 4 + 3\mathbf{i}$ mit dem Streckfaktor 2 entspricht. Die Gleichung muss nicht vereinfacht werden.
   e) Sei $z_o = 1 + \cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi)$. Für welche φ zwischen 0 und 2π ist $|z_o| \le 1$?

---

3. Drei Schützen geben gleichzeitig je einen Schuss auf die gleiche Scheibe ab. A hat eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80%, B von 60% und C von 30%.
   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Scheibe genau ein Mal getroffen wird?
   b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser einzige Treffer von A stammt?
   c) Schütze C schiesst allein 10 Mal auf die Scheibe. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als drei Mal trifft?
   d) Wie oft müsste B allein auf die Scheibe schiessen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99.9 % mindestens zwei Mal trifft?

Bitte wenden ⇒

e) Schütze A verspricht, unter folgenden Bedingungen allein bis zum ersten Treffer auf die Scheibe zu schiessen: Trifft er bereits mit dem ersten Schuss, muss er nichts in die Schützenkasse bezahlen; trifft er erst nach einem Fehlschuss, bezahlt er einen Grundbetrag G, bei zwei Fehlschüssen das Doppelte, also 2 G, bei drei Fehlschüssen das Vierfache, also 4 G, und so weiter verdoppelt! Das Versprechen ist, mathematisch gesehen, Fr. 120.- wert. Wie gross ist der Grundbetrag G?

---

4. Gegeben sind die Punkte A(5/2/6), B(6/7/6) und C(–3/7/3).

a) Wie gross ist der exakte Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

b) Wie gross ist der exakte Abstand des Ursprungs O(0/0/0) von der durch A, B und C definierten Ebene E?

c) A, B und C liegen auf einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Grundrissebene z = 0 liegt. Berechnen Sie ihren Mittelpunkt M und ihren Radius r.

d) Welcher Punkt P der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ hat den kleinsten Abstand von A?

e) Entscheiden Sie, ob obige Gerade g die Kugel mit Radius 3 um den Ursprung schneidet, berührt oder meidet (allfällige Schnittpunkte müssen nicht angegeben werden).

---

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

a) Kann der reelle Parameter t so gewählt werden, dass die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3t \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ einen Winkel von exakt 60° einschliessen?

b) Berechnen Sie ohne Taschenrechner den folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{\log_{10}(x)}$.

c) Berechnen Sie die ersten drei Ziffern (Tipp: Mit Logarithmen!) und die letzten beiden Ziffern der Potenz 2004^{2005} .

d) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) \equiv n^2$ ist.

e) Durch die Matrix **A** = $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung der x-y-Ebene gegeben.

Bestimmen Sie alle Eigenvektoren dieser Matrix **A**.

(Ende)