

**Mathematik**  
(Typus C / MN-Profil)

- Dauer: 4 Stunden.
- Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner.
- Der Lösungsweg muss überall klar ersichtlich werden.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet.
- Bitte beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einem neuen Blatt.

1. Gegeben ist die für alle reellen Zahlen  $x$  definierte Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = a x e^{(-x/a)}$ , wobei  $a$  ein reeller Parameter  $\neq 0$  ist.
- a) Beweisen Sie, dass (für positive  $a$ )  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  ist.
  - b) Berechnen Sie  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  für  $a = 1$ .
  - c) Wenn  $a$  die reellen Zahlen durchläuft, bewegt sich der Hochpunkt des Graphen von  $f$  auf einer Kurve. Wie lautet die Gleichung dieser Kurve?
  - d) Für welches  $a$  sind die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten des Wendepunktes einander gleich?
  - e) Vermuten Sie eine Gleichung für die  $n$ -te Ableitungsfunktion  $f^{(n)}(x)$  und beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

2. Gegeben ist die komplexe Abbildung  $w = f(z) = \frac{z+i}{z+1}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ .
- Für  $w$  wird die Normalform  $w = u + iv$  ( $u, v$  reell) verwendet.
- a) Auf welchen Punkt  $w$  (in Normalform) wird der Punkt  $z = 3 + 4i$  abgebildet?
  - b) Welcher Punkt  $z$  (in Normalform) wird auf den Punkt  $w = 2 + 3i$  abgebildet?
  - c) Welche Fixpunkte (in Normalform) hat diese Abbildung?
  - d) Die reelle Achse der  $z$ -Ebene wird auf eine Gerade in der  $w$ -Ebene abgebildet. Wo schneidet diese Gerade die reelle Achse, wo die imaginäre Achse?
  - e) Die imaginäre Achse der  $z$ -Ebene wird auf einen Kreis in der  $w$ -Ebene abgebildet. Berechnen Sie  $f(-i)$ ,  $f(0)$  und  $f(i)$ , und zeichnen Sie diesen Kreis in der  $w$ -Ebene.

3. Die Murks & Co AG produziert Transistoren, von denen jeder mit der Wahrscheinlichkeit  $1/8$  defekt ist.
- a) Es werden 2 Transistoren zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter genau ein defekter Transistor befindet?
  - b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 16 zufällig ausgewählten Transistoren genau 2 defekte befinden?
  - c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 6 zufällig ausgewählten Transistoren mindestens 4 nicht defekt?
  - d) Wie viele Transistoren müssen zufällig ausgewählt werden, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\geq 99\%$  mindestens 1 defekter darunter befindet?
  - e) Die Fertigungskontrolle arbeitet auch nicht ganz zuverlässig: Sie bezeichnet nur 80 % der defekten, aber leider auch 10 % der einwandfreien Transistoren als defekt. Wie viele Transistoren einer Tagsproduktion von 10'000 Stück werden im Mittel von der Fertigungskontrolle als defekt bezeichnet?

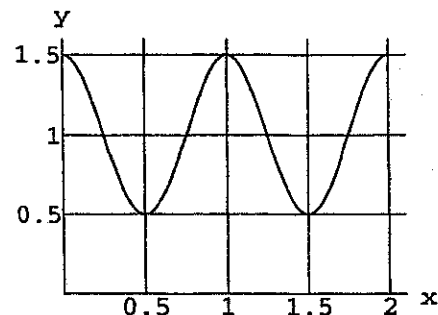
Bitte wenden  $\Rightarrow$

4. Gegeben sind die Punkte  $A(0/1/-1)$ ,  $B(0/3/-2)$ ,  $C(1/1/0)$  und  $D(-3/3/-4)$ .
- Wie gross ist der Winkel zwischen  $AB$  und  $AC$  (auf Zehntelgrade gerundet)?
  - Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene  $E(ABC)$  an.
  - Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden durch  $D$  an, die senkrecht auf der Ebene  $E(ABC)$  steht.
  - Eine Kugel mit Mittelpunkt  $D$  und Radius  $r$  berührt die Ebene  $E(ABC)$ . Wie gross ist dieser Radius  $r$ ?
  - Wie gross ist das Volumen der Pyramide  $ABCD$ ?
- 

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

- Wie viele Stellen hat die Zahl  $a = 2003^{2003}$ ? Tipp: Betrachten Sie  $\lg(a)$ ! Welches ist weiter die letzte Ziffer von  $a$ ? Tipp: Betrachten Sie die letzte Ziffer von Dreierpotenzen!
- Mit den Punkten  $O(0/0/0)$ ,  $R(x/y/z)$  und  $A(2/6/9)$  und der Gleichung  $|\vec{OR} \times \vec{OA}| = 55$  (' $\times$ ' = Vektorprodukt!) ist ein räumliches Objekt im Raum analytisch beschrieben. Was für ein Objekt ist das? Bestimmen Sie seine charakteristischen Grössen.

- c) Die nebenstehende Figur zeigt im Wesentlichen den Graphen einer verschobenen und "zusammengestauchten" Kosinus-Funktion. Wie lautet ihre Gleichung?



- Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung  $4^x > 16^{(x^2-3)}$  mit  $x$  aus  $\mathbb{R}$ .
  - Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Kosinus- und der Tangens-Funktion senkrecht schneiden, ohne dabei eine Koordinate eines Schnittpunktes zu berechnen.
- 

(Ende)