

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche,  $\pi$ , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Die maximale Punktesumme braucht für die Note 6 nicht erreicht zu werden.

## MATHEMATIK

## TYPUS C

1. Sei  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ ,  $x \in \tilde{\mathbb{N}}^+$ .
  - a) Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  unter Berücksichtigung der Null-, Extremal- und Wendestellen und geben Sie die Gleichung allfälliger Asymptoten an.
  - b) Bestimmen Sie  $a \in \tilde{\mathbb{N}}^+$  so, dass  $\int_a^{2a} f(x) dx = 0$
2. Gegeben sind die Geraden a durch  $A(1, 0, -1)$ ;  $B(1, 3, 2)$  und b durch  $C(-4, 5, 2)$ ;  $D(4, 7, 0)$ .
  - a) Beweisen Sie, dass a und b windschief sind und senkrecht aufeinander stehen.
  - b) Zeigen Sie, dass der Punkt  $P(0, 6, 1)$  auf b liegt und von allen Punkten der Geraden b den kleinsten Abstand zu a hat.
  - c) Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S eines geraden Kreiskegels mit Achse a und halbem Öffnungswinkel  $\beta = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$ , der von der Geraden b berührt wird.
3. Sei  $f_n(z) = \frac{z^n + 1}{i - z}$ ;  $z \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$ ;  $n \in \mathbb{I}$ .
  - a) Setzen Sie  $n = 1$ . Bestimmen und beschreiben Sie das Bild des Einheitskreises unter  $f_1$ .
  - b) Setzen Sie  $n = 2$ . Bestimmen Sie die Fixpunkte der Abbildung  $f_2$ .
  - c) Setzen Sie  $n = 6$ . Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung  $f_6(z) = 0$  und stellen Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

4. Weisse und schwarze Kugeln, von denen  $\frac{3}{4}$  weiss und  $\frac{1}{4}$  schwarz sind, wurden zufällig in Schachteln mit je drei Kugeln abgefüllt.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Schachtel genau eine schwarze Kugel?
  - Wie viele Schachteln müssen ausgewählt werden, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit grösser als 90% mindestens eine Schachtel mit drei schwarzen Kugeln vorkommt?

Es wird nun eine Schachtel zufällig ausgewählt und daraus zwei Kugeln gezogen. Stimmen diese in den Farben überein, werden sie durch zwei weisse Kugeln ersetzt, sonst durch zwei schwarze Kugeln. Dieser Vorgang wird zweimal durchgeführt.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Schachtel danach drei weisse Kugeln?
- Eine Schachtel enthält nun drei weisse Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthielt sie schon am Anfang drei weisse Kugeln?

5. Drei unabhängige Kurzaufgaben:

5.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung  $4^x > 16^{(x^2-2)}$  exakt in  $\mathbb{V}$ .

5.2 10 Beobachter sollen im Auftrag des Nationaltrainers 6 gleichzeitig stattfindende Fussballspiele besuchen. Jeder kann sein Spiel frei wählen, bis auf die Auflage, dass bei Zürich-Luzern und bei Servette-Basel je mindestens ein Beobachter dabei sein muss. Auf wie viele Arten können sich die Beobachter auf die Spiele verteilen, wenn es auf die personelle Zusammensetzung einer Delegation ankommt?

5.3 Berechnen Sie das unbestimmte Integral  $x \cdot (e^x + e^{x^2}) dx$